**Unidad V**

**APROXIMACIÓN FUNCIONAL E INTERPOLACIÓN DE POLINOMIOS**

Contenido

[V. Aproximación funcional e interpolación de polinomios 4](#_Toc22635919)

[5.1. Generalidades 4](#_Toc22635920)

[Observación: 5](#_Toc22635921)

[Ajuste Exacto: 5](#_Toc22635922)

[Mínimos Cuadrados: 5](#_Toc22635923)

[**5.2.** **Aproximación polinomial simple e interpolación lineal** 6](#_Toc22635924)

[**Teorema 1. Existencia y unicidad** 6](#_Toc22635925)

[**Demostración.** 6](#_Toc22635926)

[**Primero veamos** la unicidad 6](#_Toc22635927)

[**Segundo la existencia** 6](#_Toc22635928)

[**Aproximación Polinomial Simple e Interpolación** 7](#_Toc22635929)

[Algoritmo de aproximación polinomial simple,N 9](#_Toc22635930)

[5.3. Interpolación de Lagrange 10](#_Toc22635931)

[5.3.1. Comentarios. 10](#_Toc22635932)

[5.3.2. Construcción polinomial 10](#_Toc22635933)

[1° Consideremos un polinomio de primer grado 10](#_Toc22635934)

[2°. Supongamos un polinomio de segundo grado 11](#_Toc22635935)

[3°. Podemos suponer un polinomio de grado n: 12](#_Toc22635936)

[5.3.3. Ejemplo: 12](#_Toc22635937)

[5.3.4. Algoritmo de interpolación polinomial de Lagrange 13](#_Toc22635938)

[5.4. Diferencias divididas 14](#_Toc22635939)

[Algoritmo de para diferencias divididas 17](#_Toc22635940)

[5.5. Aproximación Polinomial de Newton en diferencias Divididas 17](#_Toc22635941)

[1. Aproximación por un Polinomio de Primer Grado 18](#_Toc22635942)

[2. Aproximación por un Polinomio de Segundo Grado 18](#_Toc22635943)

[3. Generalización 19](#_Toc22635944)

[Ejemplo: 19](#_Toc22635945)

[Algoritmo Interpolación Polinomial de Newton. 21](#_Toc22635946)

[**5.5.** **Polinomio de Aproximación de Newton en Diferencias finitas: hacia delante – hacia atrás** 22](#_Toc22635947)

[Ejemplo: 25](#_Toc22635948)

[5.6. Estructura del Polinomio de Newton en Diferencias Divididas hacia atrás de grado *n* en *x*n 26](#_Toc22635949)

[*Ejemplo:* 27](#_Toc22635950)

[**5.7.** **Aproximación Polinomial con Mínimos Cuadrados** 27](#_Toc22635951)

[Ejemplo. 30](#_Toc22635952)

[Solución, 30](#_Toc22635953)

[**5.8.** **Aproximación Polinomial Multilineal con Mínimos Cuadrados** 31](#_Toc22635954)

[INTERPOLACIÓN Y APROXIMACIÓN FUNCIONAL 32](#_Toc22635955)

# V. Aproximación funcional e interpolación de polinomios

# 5.1. Generalidades

En el campo de la matemática aplicada es de gran importancia la manera como determinar una función o funciones a partir de un conjunto de datos discretos, i.e., puntos tabulados, situación que siempre se enfrenta cualquier investigador, para decir generalmente un Ingeniero siempre tiene al frente esta problemática fenómeno que será el objetivo de este ítem.

Pues es común encontrar datos con valores discretos, y sin embargo nosotros queremos encontrar valores entre estos puntos discretos, y esto es lo que lo llamamos ajuste de curvas y, generalmente se usa el procedimiento de mínimos cuadrados.

Cuando existe un conjunto de datos muy precisos, en este caso se usa lo que se llama interpolación.

Las funciones de aproximación generalmente son obtenidas por combinación lineal de funciones elementales, que toman la forma de:



En donde:

***ai* :** Son constantes que deseamos encontrar, i=1,2,...,n

***gi*(*x*)** **:** Son funciones elementales específicas, i=1,2,...,n

1. ***gi* (*x*):** Puede ser la familia de monomios en  luego tenemos la combinación lineal:



1. La familia de funciones elementales de **Fourier**, en función de “*x”*

1*, sen x, cos x, sen* 2*x, cos* 2*x, sen* 3*x, cos* 3*x,..*

La combinación lineal que genera aproximaciones de la forma:



1. La familia de funciones exponenciales en *x*:



Que proporciona la siguiente combinación lineal



### Observación:

1. De las tres familias observadas podemos decir que la primera es la más utilizada y la más sencilla en su manejo.
2. ¿Qué buscamos en esta unidad?

Buscamos unan función f(x) a partir de una tabulación funcional f(*x*):

Punto 0 1 2 3 . . . *i* . . . *n*

Variable x*0 x1 x2 x3 . . . xi . . . xn*

Función *f* (*x0*) *f* (*x1*) *f* (*x2*) *f* (*x3*) . . . *f* (*x1*) . . . *f* (*xn*)

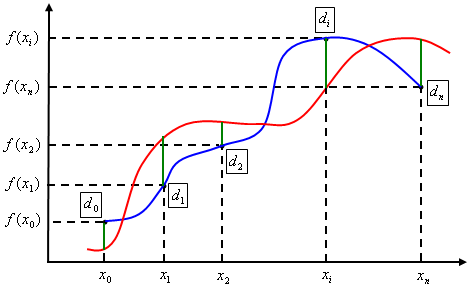
Es decir, queremos aproximar a *f*(*x*) por medio de la familia elemental de monomios  es decir,

, que se puede realizar por medio de los siguientes criterios:

* **Ajuste exacto**
* **Mínimos cuadrados**

### Ajuste Exacto:

Consiste en determinar una función polinomial que pase por los puntos proporcionados tabular mente. Esto es:



### Mínimos Cuadrados:

Consiste en determinar una función polinomial que pase por los puntos y que cumpla la condición de minimizar la suma de las desviaciones (*di*) elevados al cuadrado. i.e.;  = mínimo

Encontrado el polinomio de aproximación podemos utilizarlo para determinar otros puntos que no están en la tabla, mediante una evaluación, fenómeno que se llama **Interpolación,** así mismo se puede derivar o integrar con la finalidad de buscar alguna otra información adicional de la función tabular.

* 1. **Aproximación polinomial simple e interpolación lineal**

**Teorema 1. Existencia y unicidad**

Sean  , números reales diferentes, **entonces** para valores arbitrarios existe un único polinomio , de a lo más grado n de manera que .

**Demostración.**

**Primero veamos** la unicidad

Supongamos la existencia de dos polinomios y , que satisfagan el teorema, entonces , ya que el grado de puede ser a lo más n, este polinomio puede tener a lo más n ceros, mientras que no sea el polinomio cero, pero como los , son diferentes, , tiene n+1 ceros, por lo tanto debe de valer cero consecuentemente .

**Segundo la existencia**

Usaremos inducción, para la existencia es obvia, puesto que una función constante , un polinomio de grado menor o igual a cero, se puede escoger de tal manera que ,

Supongamos que se ha obtenido un polinomio  de grado menor o igual , tal que , construiremos así,

, …, (1)

Observemos que se trata de un polinomio de grado a lo más k, y además , interpola los mismos datos que , ya que.

,

Encontremos el coeficiente c a partir de la condición de que , esto nos conduce a la siguiente ecuación,

,…, (2)

De la relación (2) se puede despejar c con toda seguridad debido a que todos los factores que multiplican a c no son ceros.

**Aproximación Polinomial Simple e Interpolación**

Ahora podemos decir que la interpolación lineal es el eje para muchos métodos numéricos y de gran relevancia en la ingeniería, puesto que una gran información se encuentra en su forma tabular, como veremos más adelante y es usado por una diversidad de métodos numéricos, por ejemplo, si integramos este método tendremos el método de integración trapezoidal.

¿En qué consiste este método?

Supongamos que tenemos los siguientes cuadros:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Puntos | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6  *Cuadro 1* |
| *f(x)(temperatura)* | 56 | 78 | 113 | 144 | 181 | 205 | 214 |
| *X (presión atmosférica)* | 1 | 2 | 5 | 10 | 20 | 30 | 40 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Puntos | 0 |  | 1 | 2 | 3  *Cuadro 2* |
| *f(x)* | 56 | ¿-? | 113 | 181 | 214 |
| *X* | 1 | 2 | 5 | 20 | 40 |

Supongamos por un instante que sólo se dispone del cuadro 2 y que queremos el valor de la variable **“*y=f(x)”*** cuando *x* tiene un valor de 2 unidades. Una manera muy común es considerar la ecuación de una línea recta así:

, y sustituirlos valores de los puntos 0 y 1, obteniendo dos ecuaciones con variables a0  y a1

Punto “0” = (1,56); punto 1: (5,113); (*x,* f(*x*))

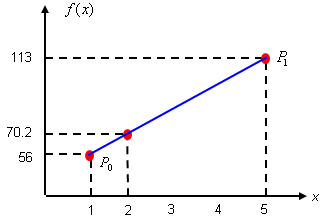


Luego la ecuación de la función lineal:

***p*(*x*) *=* 41.8 + 14.2*x***

Esta ecuación puede ser usado para calcular *f* (*x*) cuando *x* = 2





**Observación:**

Si queremos una mejor aproximación para nuestra función deberíamos considerar otro punto más y tendremos:

**,**

Sean los puntos



Resolviendo el sistema, tenemos que:

,

En consecuencia el polinomio de aproximación será,

**,**

,

**,**

Gráficamente representa una parábola. En general tendremos la siguiente aproximación polinomial.



214

113

76

56

1 2 5 10 20 30 40

### Algoritmo de aproximación polinomial simple, N

Comentarios %......

**Datos, Grado del polinomio N, y las N+ 1 parejas de , para i=0,1,2,…,N**

**Resultados los coeficientes, A(0), A(1), …,A(N)**

**Mostrar el polinomio de aproximaci[on**

**Paso 1, hacer I=0**

**Pao2, mientras que repetir los pasos 3 a 9,**

**Paso3. B(I,0)=1**

**Paso4, hacer J=1**

**Paso5, mientras repetir los pasos 6 y7**

**Paso6, Hacer B(I,J)=B(I,J-I)\* X(I)**

**Paso 7, Hacer J=J+1**

**Paso8. Hacer B(I,N+1)=F(X(I))**

**Paso 9. Hacer I=I+1**

**Paso10 resolver el Sistema de ecuaciones lineales Ba=f(x),**

**Seca**

## 5.3. Interpolación de Lagrange

### 5.3.1. Comentarios.

El método anterior tiene su punto débil en la aproximación exacta, al realizar la interpolación, pues se tenía que solucionar un sistema de ecuaciones que su orden dependía de la exactitud de la aproximación, con la finalidad de salvar estos inconvenientes, surgen otros métodos de aproximación polinomial, que realicen cálculos directos sin desarrollar tales sistemas de ecuaciones que envuelven cierta dificultad en su solución.

Es importante destacar que existe uno y solo un polinomio de interpolación, de grado menor e igual n asociado con el conjunto de datos, asumiendo loas abcisas, son diferentes, existiendo la posibilidad de expresar los polinomios de maneras diferentes y de arribar a él por diferentes proceso, métodos.

### 5.3.2. Construcción polinomial

Entre estos métodos tendremos la aproximación polinomial de Lagrange. El método que consiste en:

Primero: Supongamos una función desconocida *f* (*x*) dada en forma tabular y se asume un polinomio de primer grado el cual se puede escribir de la siguiente manera:

### 1° Consideremos un polinomio de primer grado

En donde:

*x*0, *x*1: Son valores de la función en puntos conocidos [*x*0, *f* (*x*0)], [*x*1, *f* (*x*1)]

*a*0, *a*1: Coeficientes por determinar, y lo encontramos haciendo las consideraciones siguientes:

Haciendo, entonces tenemos que,  , es decir

,

Haciendo, entonces tenemos que, , es decir

,

En consecuencia, podemos escribir,

, donde con los coeficientes considerados

que es lo mismo,

considerando

### 2°. Supongamos un polinomio de segundo grado



En donde:

*x*0, *x*1, *x*2 son los valores de los puntos conocidos [*x*0, f(*x*0)], [*x*1, f(*x*1)], [*x*2, f(*x*2)] trabajando similarmente que en la primera parte se tiene,

Si 

Si 

Si 

Luego:



En donde:



### 3°. Podemos suponer un polinomio de grado n:



En donde:



En general el polinomio se puede escribir:

, polinomio Lagrange

En donde:

,

La aproximación polinomial de Lagrange, es la combinación lineal de f(Xi ) y de los coeficientes Li(X).

### 5.3.3. Ejemplo:

Supongamos que tenemos la función tabular

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| i | 0 | 1 | 2 | 3 |
| f(Xi) | -3 | 0 | 5 | 7 |
| Xi | 0 | 1 | 3 | 6 |

a) Determinar la aproximación polinomial de Lagrange usando todos los puntos

b) Determinar el valor aproximado de *f* (*x*) para *x* = 1.8

**Solución:**

Debemos destacar que la tabla presenta cuatro puntos lo que induce la existencia de un polinomio de tercer orden



Operando tenemos:



El valor aproximado de la función cuando *x* = 1.8



### 5.3.4. Algoritmo de interpolación polinomial de Lagrange

Datos, grado N del polinomio, las N+1 parejas de valores, , el valor para el que se desea interpolar XINT,

Resultados, La aproximación FXINT , el valor de la función en XINT,.

Paso 1. Hacer FXINT=0

Paso 2. Hacer i=0

Paso 3. Mientras que repetir los pasos del 4 al 10,

Paso 4. Hacer

Paso 5. Hacer j=1

Paso 6. Mientras repetir los pasos 7 y 8

Paso 7. Si

Hacer

Paso 8. Hacer

Paso 9. Hacer

Paso 10. Hacer

Paso 11. Imprimir FXINT y Terminar.

Construir un programa para para con un polinomio de Lagrange de grado 1,2,3, 4, …,10, use los puntos que requieran distribuidos regularmente, en el intervalo, determine el error absoluto y comente los resultados.

## 5.4. Diferencias divididas

Así como podemos aproximar una función mediante la aproximación polinomial de Lagrange, también podemos aproximar la derivada y la integral de una función con diferencias divididas. La derivada y la integral respectivamente el polinomio de interpolación, que en realidad es el principio básico para la diferenciación e integración de los métodos numéricos.

Supongamos una función *f* (*x*) con derivada en el punto *x*0 analíticamente este dado por: 

Pero cuando la función es dada de manera tabular, se tiene.



La derivada sólo puede obtenerse de manera aproximada, por ejemplo si se desea calcular la derivada de f(x) en el punto “*x”* tal que *x*0 < *x* < *x*1

Esto se determina así:



La expresión de la derecha se llama **primera diferencia dividida** de *f* (*x*) respecto a los valores de *x*0 y *x*1 y se denota generalmente *f* [*x*0, *x*1], esto es,



**Observación:**

1. Se debe destacar que la relación entre la primera diferencia dividida y la primera derivada está dada por el teorema del valor medio.



Siempre que *f* (*x*) cumpla con las condiciones del teorema del valor medio.

1. Podemos generalizar para un orden más alto en donde el argumento es  se llama diferencia dividida, de orden cero:



i.e.; orden cero:



***Tercero***

***Segundo***

***Primero***

**Observación:**

* Para formar la expresión se requiere *i* + 1 puntos.
* El numerador es la recta de dos diferencias de orden *i* – 1.
* El denominador es la recta de los argumentos no comunes en el numerador.

**Ejemplo:**

Supongamos que tenemos la siguiente información



Obtenido del polinomio 

La primer diferencia dividida en los puntos (0), (1) y (1), (2)

La segunda diferencia dividida para (0), (1) y (2)

De esta manera construimos la tabla de diferencias divididas.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Puntos | X | f(x) | 1º orden | 2º orden | 3º 0rden | 4º orden |
| 0 | -2 | -18 |  |  |  |  |
|  |  |  | 13 |  |  |  |
| 1 | -1 | -5 |  | -5 |  |  |
|  |  |  | 3 |  | 1 |  |
| 2 | 0 | -2 |  | -1 |  | 0 |
|  |  |  | 0 |  | 1 |  |
| 3 | 2 | -2 |  | 3 |  | 0 |
|  |  |  | 9 |  | 1 |  |
| 4 | 3 | 7 |  | 9 |  |  |
|  |  |  | 45 |  |  |  |
| 5 | 6 | 142 |  |  |  |  |

Observemos que:

Todas las diferencias divididas de tercer orden tienen el mismo valor independiente del valor de las x que se usen para calcularse.

Las diferencias de cuarto orden todos tienen el valor de cero, lo que tiene afinidad con el criterio que la derivada de tercer orden es una constante y la de cuarto orden es cero, para cualquier valor de x.

El razonamiento anterior nos induce a decir que si al construir una tabla de diferencias divididas en alguna columna el valor es constante y la siguiente columna es cero la información proviene de un polinomio de grado igual al orden de las diferencias que tengan valores constantes.

El razonamiento anterior nos induce afirmar que nuestro polinomio es de grado 3 es decir mi polinomio será:



En nuestro ejemplo se tiene:







### Algoritmo de para diferencias divididas

Para determinar la tabla de diferencias divididas de una función dada en forma tabular se debe de proveer de,

Datos, Número de parejas M de la función tabular y la pareja de valores , ,

Salidas, La tabla de diferencias divididas T.

Paso, 1. Hacer

Paso 2, Hacer I=0

Paso, 3. Mientras , repetir los pasos 4 y 5.

Paso, 4. Hacer

Paso, 5. Hacer

Paso,6. Hacer J=1

Paso, 7. Mientras 8 a 12,

Paso, 8. Hacer

Paso, 9. Mientras , repetir los pasos 10 y 11,

Paso, 10. Hacer,

Paso, 11. Hacer

Paso,12. Hacer ,

Paso, 13. Imprimir T y Terminar,

## 5.5. Aproximación Polinomial de Newton en diferencias Divididas

Supongamos que tenemos una función tabular y que queremos aproximar mediante un polinomio de primer grado:



### Aproximación por un Polinomio de Primer Grado

.

En donde:

*x*0 : Es la abscisa del punto “0”

*a*0, *a*1 : Constantes por determinar

Si: .

Consecuentemente tendremos: 

 Pero: 

Luego:



Es un polinomio de primer grado en términos de diferencias derivadas,

### Aproximación por un Polinomio de Segundo Grado



En donde:

*x*0, *x*1 : Son las abscisas de los puntos “0” y “1”

*a*0, *a*1, *a*2 : Constantes que debemos encontrar

Si:



Luego tenemos:



### Generalización



En donde:

: Son las abscisas de los puntos 0, 1, 2, …, *n*

: Son coeficientes por determinar y están dados por:



Esto es tendremos la siguiente aproximación polinomial



 Polinomio de aproximación de **Newton**

### Ejemplo:

Determinar la aproximación polinomial de Newton para la información tabular e interpolar para *x* = 2

**Diferencias Divididas**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | | **Diferencias divididas** | | | |
| **Puntos** | **X** | **f[x]** | | **1º dividida** | **2º dividida** | **3º dividida** | |
| **0** | **1** | **56** | |  |  |  | |
|  |  |  | | **14.25** |  |  | |
| **1** | **5** | **113** | |  | **-0.31** |  | |
|  |  |  | | **4.53333333** |  | **0.019** | |
| **2** | **20** | **181** | |  | **0.081** |  | |
|  |  |  | | **1.65** |  |  | |
| **3** | **40** | **214** | |  |  |  | |

* 

**Observación:**



* 



* 



Pero:



Si: *x* = 2

**Ejemplo 1**.

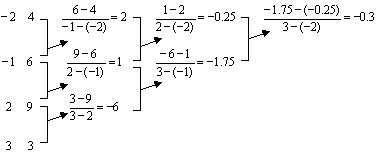
Calcular la tabla de diferencias divididas finitas con los siguientes datos,

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -2 | -1 | 2 | 3 |
| y | 4 | 6 | 9 | 3 |

Y utilizar la información de dicha tabla, para construir el polinomio de interpolación de Newton.

***Solución.***

Procedemos como sigue:

****

Por lo tanto el polinomio de interpolación de Newton es :

image108

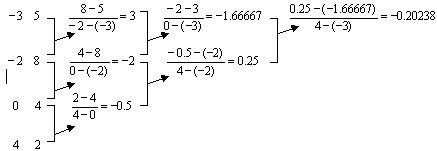
**Ejemplo 2.**

Calcular la tabla de diferencias divididas finitas con los siguientes datos :

**4f14**

 Y usar la información en la tabla, para construir el polinomio de interpolación de Newton.

***Solución.*** Procedemos como sigue:

****

 Por lo tanto el polinomio de interpolación de Newton nos queda:

image110.

### Algoritmo Interpolación Polinomial de Newton.

**Para interpolar con polinomios de Newton en diferencias divididas de grado N.**

**Datos: El grado del polinomio N, las N+1 parejas de valores**

**, y el valor para el que se desea interpolar .**

**Resultados. La aproximación al valor de la función en** **.**

**Paso, 1. Realizar los pasos 2, a 12 del algoritmo**

**Paso,2. Hacer**

**Paso,3. I=0,**

**Paso, 4. Mientras , repetir los pasos del 5 al 11,**

**Paso, 5. Hacer**

**Paso, 6. Hacer**

**Paso, 7. Mientras , repetir los pasos del 8 y 9,**

**Paso, 8. Hacer ,**

**Paso, 9. Hacer ,**

**Paso, 10. Hacer** **,**

**Paso, 11. Hacer**

**Paso, 12. Imprimir, , y terminar.**

* 1. **Polinomio de Aproximación de Newton en Diferencias finitas: hacia delante – hacia atrás**

Supongamos que la distancia entre dos argumentos (abscisas) consecutivas cualquiera es igual, en toda la función tabular y sea “h”.

El polinomio de aproximación de Newton en diferencias divididas se puede escribir de manera más simple, para nuestro propósito, consideremos otro punto S; definido por:

 *x*: Es el valor que se quiere interpolar

Pero:



Qué ocurre **si restamos *x*i en ambos miembros**



Si consideramos el desarrollo general del polinomio de Newton, i.e.:





ó:



Observemos que la última relación de aproximación se puede simplificar si hacemos ingresar los operadores lineales y, conocidos como:

: Operador lineal en diferencias hacia delante

: Operador lineal en diferencias hacia atrás

En donde:

***Primera Diferencia*** 



***La segunda diferencia:*** 

****

***La tercera diferencia:*** 



***En general:***



De manera análoga para el operador lineal de diferencia hacia atrás

***Primera Diferencia:***



***Segunda Diferencia:*** 



***En general:***

******

Qué ocurre si aplicamos  al primer valor funcional *f* [*x*0] de una tabla proporcionada.



***En general:***



De manera análoga para el operador de diferencias hacia atrás



Consecuentemente al sustituir  en



Es conocido como el polinomio de Newton en diferencia finita hacia delante.

### Ejemplo:

Supongamos que tienen las siguientes tabulaciones:



Aproximar la función tabulada usando el polinomio de Newton en diferencias finitas hacia delante e interpole para 64

**Solución**

* En este conjunto de datos tenemos que *h* = 10, el valor por interpolares 64
* El valor de 

**PARA UN POLINOMIO DE PRIMER ORDEN**

Para *n* = 1

;

en donde



Es preciso destacar que en realidad se esta extrapolando, pues el valor de *x* queda fuera del intervalo de los puntos que se usan para formar el polinomio de aproximación.

* Debemos observar que el polinomio de aproximación descrita en fue estructurado considerando *x*0 como pivote y luego si queremos aplicar para los puntos (1) y (2) debemos modificar así:



 En donde:

 Luego tenemos:



Debemos resaltar que si deseamos aproximar con un polinomio de segundo grado se requieren tres puntos, tendríamos dos alternativas, tomar como puntos (0), (1) y (2) ó (1), (2) y (3), en este caso tomaría la primera serie por que el valor a interpolar está más al centro, luego tendríamos:



## Estructura del Polinomio de Newton en Diferencias Divididas hacia atrás de grado *n* en *x*n

Supongamos *n* = 2 y asumamos que el polinomio sea de 2º grado:



En donde:

 : Son abscisas de los puntos “*n*” y “*n* – 1"

 : Son las constantes por determinar

Si:



Luego tendremos que:



***Generalizar***



En donde:



Considerando la diferencia de las abscisas consecutivas igual a *h* e introducimos una variable paramétrica “s” definida como:

; *x*: el valor a interpolar



Luego tenemos:



### *Ejemplo:*

En el ejemplo realice la interpolación para *x* = 98 usando el polinomio de Newton

* Si usamos un polinomio de primer grado tenemos



* Si usamos un polinomio de segundo grado tenemos



* 1. **Aproximación Polinomial con Mínimos Cuadrados**

Hasta el momento nuestra preocupamos era determinar un polinomio de aproximación que pase por los puntos dados de manera tabular. Pero en una diversidad de oportunidades tal información tiene muchos errores de diversas índoles como por ejemplo de medición, recolección de datos, pues ante estos hechos no tiene sentido pasar un polinomio de aproximación por los puntos dados, sino cerca de ellos.

Sin embargo, esta consideración crea un problema, porque se puede pasar un número infinito de curvas entre los puntos, para determinar la mejor curva se establece un criterio que fije una metodología para encontrar dicha curva, El criterio más común consiste en pedir que la suma de las distancias calculadas entre los valores de la función que aproxima a  y el valor dela función dada en la tabla sea mínima es decir,

.

Con la finalidad de evitar problemas de derivabilidad, se acostrumbra usar las distancias , elevado al cuadrado.

.

Observamos que los puntos tabulados, por el polinomio de aproximación y sus distancias, si utilizamos,

, …, (1)

aproximemos la función , dada por la tabla, el problema se transforma como minimizar,

,…, (2)

Observemos que del número infinito de polinomios que pasan entre los puntos, se selecciona aquel cuyos coeficientes  y , minimice el modelo 2,

En el cálculos de funciones de una variable sabemos que para encontrar el mínimo o máximo de un función se deriva y se iguala a cero la derivada, después se debe de resolver la ecuación resultante para obtener los valores de la variable que pudieran minimizar o maximizar la función. En el caso se debe de minimizar un función de variables y , el proceso consiste en derivar parcialmente con respecto a cada una de las variables e igualar a cero cada derivada con la que se obtiene dos ecuaciones algebraicas en las incógnitas y , esto es,

,

,…, (3)

Realizando las derivadas adecuamente es decir dentro de las sumatorias tenemos,

,

,

Desarrollando las sumatorias se tiene,

,

,

Simplificando,

,

,

El sistema se resuelve por la regla de Cromer y se tiene,

, …, (4)

Que sustituidos en la ecuación (1) proporciona la aproximación polinomial de primer grado que mejor ajusta la información tabular. Este polinomio puede usarse con la finalidad de determinar valores aproximativos de f(x), para argumentos no conocidos en la tabla.

### Ejemplo.

A seguir presentamos el alargamiento de un resorte al ser sometido a diferentes fuerzas,

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Fuerza en kg. x | 0 | 2 | 3 | 6 | 7 |
| Longitud del resorte, y | 0.120 | 0.153 | 0.170 | 0.225 | 0.260 |

Se pide usar mínimos cuadrados para determinar el mejor polinomio de primer grado.

### Solución,

Con la finalidad de facilitar algunos cálculos, construimos la siguiente tabla,

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Puntos | Fuerza | Longitud |  |  |
| 1 | 0 | 0.120 | 0 | 0.000 |
| 2 | 2 | 0.153 | 4 | 0.306 |
| 3 | 3 | 0.170 | 9 | 0.510 |
| 4 | 6 | 0.225 | 36 | 1.350 |
| 5 | 7 | 0.260 | 49 | 1.820 |
|  | 18 | 0.928 | 98 | 3.986 |

Reemplazando estos valores en la ecuación (4), tenemos,

, y

Obteniendo el siguiente polinomio,

**.**

El grado del polinomio no tiene relación con la cantidad de puntos utilizados y debe de seleccionarse con base a consideraciones teóricas que fundamenta la metodología.

Debemos destacar el hecho de tener la mejor recta que aproxime la información, no significa que la información esté bien aproximada quisas convenga aproximar con una parábola o con una cubica.

Para determinar el polinomio de segundo grado, que mejor minimice la tabulación, debe de minimizarse,

,…, (5)

Donde los parámetros , , y se obtienen al resolver el sistema de ecuaciones lineales que resulta de derivar parcialmente e igualar a cer la función por minimizar con respecto a cada uno de los parámetros dicho sistema es el siguiente,

,

,

, …, (6)

Cuya solución es obtenida usando cualquier método.

### Ejemplo.

El calor especifico del Mn3o4, varía con la temperatura de acuerdo con la siguiente tabla,

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| T(K) | 280 | 650 | 1000 | 1200 | 1500 | 1700 |
| Cp.(cal/k.gmol) | 32.7 | 45.4 | 53.15 | 53.7 | 52.9 | 50.3 |

Utilizar el método de mínimos cuadrados para determinar un polinomio de aproximación.

### Solución.

La tabulación sugiere un polinomio de segundo orden que es el más simple, con la finalidad de facilitar los cálculos presentaremos,

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Puntos i | T | Cp. |  |  |  |  |  |
| 1 | 280 | 32.7 | 0.78x105 | 0.022x109 | 0.062x1011 | 9156 | 2.56x106 |
| 2 | 650 | 45.4 | 0.42x106 | 0.275x109 | 1.785x1011 | 29510 | 19.18x106 |
| 3 | 1000 | 53.15 | 1.00x106 | 1.000x109 | 1.000x1012 | 52150 | 52.15x106 |
| 4 | 1200 | 53.7 | 1.44x106 | 1.728x109 | 2,074x1012 | 64440 | 77.33x106 |
| 5 | 1500 | 52.9 | 2.25x106 | 3.375x109 | 5.063x1012 | 79350 | 119.03x106 |
| 6 | 1700 | 50.3 | 2.89x106 | 4.900x109 | 8.50x1012 | 85510 | 145.37x106 |
|  | 6330 | 287.15 | 8.08x106 | 11.3x109 | 166.7x1011 | 320116 | 415.62x106 |

Los coeficientes se sustituyen en el sistema de ecuaciones (6) y se obtiene,

,

,

,

Cuya solución por el método de eliminación gaussiana arrojo,

El polinomio de aproximación es,

,

Usar el polinomio de aproximación encontrado para obtener el calor específico a una temperatura de 800 k.

,

Para determinar un polinomio de mayor grado se sigue con el mismo criterio es decir estructurando el sistema de ecuaciones usando para ello las derivadas parciales con respecto al coeficiente e igualando a cero.

### Algoritmo de aproximación con mínimos cuadrados,

Para obtener los N+1 coeficientes de un polinomio óptimo de grado N que pasa entre M parejas de puntos.

**Datos,** El grado del polinomio de aproximación N, el número de parejas de valores, , .

**Resultados**, los coeficientes , del polinomio de aproximación.

**Paso,1.** Hacer

Paso, 2. Mientras , repetir los pasos 3 a 5,

Paso, 3. Si , hacer,

* 1. **Aproximación Polinomial Multilineal con Mínimos Cuadrados**

**PRÁCTICA Nº 5**

### INTERPOLACIÓN Y APROXIMACIÓN FUNCIONAL

1. **Determine el polinomio que interpolan los siguientes conjuntos de datos: Primer grado, segundo grado, tercer grado, y cuarto grado.**

**a)**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **I** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** |
| **f(xi)** | **40** | **45** | **50** | **55** | **60** |
| **xi** | **2** | **3** | **5** | **6** | **8** |

**b)**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **I** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** |
| **f(xi)** | **10** | **15** | **20** | **25** | **30** |
| **xi** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** |

**c)**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **I** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** |
| **f(xi)** | **140** | **245** | **450** | **655** | **960** |
| **xi** | **1** | **5** | **10** | **15** | **20** |

**d)**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **I** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** |
| **f(xi)** | **1** | **-3** | **2** | **4** | **10** |
| **xi** | **3** | **1** | **2** | **6** | **9** |

**e)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **I** | **0** | **1** |
| **f(xi)** | **3** | **7** |
| **xi** | **5** | **-1** |

**f)**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **I** | **0** | **1** | **2** |
| **f(xi)** | **146** | **2** | **1** |
| **xi** | **7** | **1** | **2** |

**g)**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **I** | **0** | **1** | **2** | **3** |
| **f(xi)** | **10** | **146** | **2** | **1** |
| **xi** | **3** | **7** | **1** | **1** |

**h)**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **I** | **0** | **1** | **2** | **3** |
| **f(xi)** | **12** | **20** | **50** | **55** |
| **xi** | **3** | **7** | **1** | **2** |
|  |  |  |  |  |

**NOTA: CUANDO SEA NECESARIO, REDONDEA A CINCO DECIMALES.**

**I.1. Calcula el polinomio de interpolación de Newton para los siguientes datos:**

*i)* image459

*ii)*  image461

***Soluciones:***

image463

image465

image467

**2.** Calcula el polinomio de Lagrange para los siguientes datos:

*i)*  image469

*ii)* image471

***Solución:***

image473

image475

image477

image479

**II Encuentre un polinomio de Interpolación de Lagrange, Diferencias Divididas y Newton**

a)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| I | 0 | 1 | 2 | 3 |
| f(xi) | 3 | 2 | -4 | 5 |
| xi | 1 | 2 | 0 | 3 |

b)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| I | 0 | 1 | 2 |
| f(xi) | 11 | 7 | 28 |
| xi | 2 | 0 | 3 |

c)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| I | 0 | 1 | 2 |
| f(xi) | 1 | -1 | 0 |
| xi | 0 | 1 | -2 |

d)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| I | 0 | 1 | 2 |
| f(xi) | 10 | 5 | 20 |
| xi | 2 | 1 | 2 |

**III Determinar la interpolación en los puntos dados usando los dos polinomios**:

1. Para el caso (a)X= -1; X =1.5; X = 2.01: X= 0.5; X= 4
2. Para el caso (b)X= -1; X =1.5; X = 2.01: X= 0.5; X= 4
3. Para el caso (c)X= -1; X =1.5; X = 2.01: X= 0.5; X= 3

**IV: Solucionar las siguientes problemáticas**

1.- Se conoce que la densidad del carbonato neutro de potasio en solución acuosa varia en temperatura y en su concentración de acuerdo a la siguiente investigación:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| T(ºC)  c(%) | 0 | 40 | 80 | 100 |
| 4 | 1.0381 | 1.0276 | 1.0063 | 0.9931 |
| 12 | 1.1160 | 1.1013 | 1.0786 | 1.0663 |
| 20 | 1.1977 | 1.1801 | 1.1570 | 1.1451 |
| 28 | 1.2846 | 1.2652 | 1.2418 | 1.2301 |

a) Calcular la densidad a 40ºC y 15% de concentración

b) Calcular la densidad a 50º Cy 28% de concentración

c) Calcular la concentración que tiene una solución de densidad 1.129 a una temperatura 60ºC

2.- Supongamos que se tiene un conjunto de datos, donde e representa los voltios y p los kilowatios en una curva de pérdida en el núcleo para un motor eléctrico:

a) Construir una tabla de diferencias divididas

b) Usando el polinomio de Newton de segundo grado aproxime el valor correspondiente a e = 90 voltios

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| I | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| E | 40 | 60 | 80 | 100 | 120 | 140 | 160 |
| P | 0.63 | 1.36 | 2.18 | 3.00 | 3.93 | 6.22 | 8.59 |

3.- Se tiene los siguientes datos tabulados:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Puntos | 0 | 1 | 2 | 3 |
| a = l/r | 140 | 180 | 220 | 240 |
| y = p/a | 12,800 | 7,500 | 5,000 | 3,800 |

Donde y = p/a es la carga en lb/pul2 que causa la ruptura una columna de hierro dulce con extremos redondeados y a es la razón de la longitud de la columna al mínimo radio de giro en su sección transversal a = l/r

Determinar el polinomio de tercer grado que pasa por estos puntos en sus distintas formas

a)  Aproximación polinomial simple

b) Formula de Lagrange

c) Aproximación de Newton y Diferencias Divididas. W.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFÍA

[1] David Kincaid, Ward Cheney, (1994) “Análisis Numérico, Las matemáticas del cálculo científico” Eddison Wesley Iberoamericana. México.

[2] Shoichiro Nakamura (1992) “Métodos Numéricos Aplicados con Software” Prentice-Hall Hispanoamerica, S.A México.

[3] Shoichiro Nakamura (1997) “Análisis Numérico y Visualización Gráfica con Matlab” Prentice-Hall Hispanoamerica, S.A México.

[4] Steven. C. Chapra; Raymond P. Canale (2006) “Métodos Numéricos para Ingenieros” Mc Graw Hill Interamericana. Quinta edición. México.

[5] Antonio N. Hurtado; Federico. D. Sanchez (2014) “Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería” Grupo Editorial Patria. México.